CHAPITRE 1

Les Polynômes Orthogonaux

www.cafeplanck.com  
info@cafeplanck.com

CHAPITRE 1

[Fonctions de carré sommable 3](#_Toc341024798)

[Espace des fonctions de carré sommable  3](#_Toc341024799)

[Carré de la norme de  4](#_Toc341024800)

[La norme de  4](#_Toc341024801)

[Orthogonalité 4](#_Toc341024802)

[Orthonormalité 4](#_Toc341024803)

[Analogie 5](#_Toc341024804)

[Bases orthonormées de l'espace  6](#_Toc341024805)

[Relation orthonormalité 6](#_Toc341024806)

[Développement d'une fonction sur la base  6](#_Toc341024807)

[Les coefficients  6](#_Toc341024808)

[Analogie 7](#_Toc341024809)

[Analogie 8](#_Toc341024810)

[Théorème de Stone-Weierstrass 9](#_Toc341024811)

[Procédé de Gram-Schmidt 9](#_Toc341024812)

[Formule de Rodrigues 11](#_Toc341024813)

[Procédé de Rodrigues 11](#_Toc341024814)

[Quelques applications des polynômes orthogonaux classiques 14](#_Toc341024815)

Les Polynômes Orthogonaux

# Fonctions de carré sommable

Les fonctions de carré sommable sont des fonctions pour lesquelles,  appelée fonction poids, est une fonction à valeurs finies et strictement positive dans.

Exemples

# Espace des fonctions de carré sommable

L’ensemble des fonctions de carré sommable forme l’espace. La structure de  est celle d'un espace de Hilbert. Autrement dit, est un espace vectoriel munie le produit scalaire :

   
Avec les propriétés suivantes.   
Pour tous les fonctions,  et  de et tous les nombres complexes.





[[1]](#footnote-1)

[[2]](#footnote-2)



## Carré de la norme de

Le carré de la norme de définie par :  


## La norme de

La norme de définie par :  


## Orthogonalité

Les fonctions et  sont orthogonales si  


## Orthonormalité

Les fonctions et  sont orthonormale si  


Exemples

## Analogie

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | et  éléments de | et  éléments de | et  éléments de |
| Produit scalaire |  |  | Avec, |
| Carré de la norme |  |  |  |
| La norme |  |  |  |
| Normalité |  |  |  |
| Orthogonalité |  |  |  |
| Orthonormalité |  |  |  |

Tableau 1

# Bases orthonormées de l'espace

Soit un ensemble dénombrable de fonction de :   
Avec.  
L'ensemble  forment une base orthonormale de l'espace , si

1. Les éléments de  soient orthogonale.  
   (Tous ses éléments soient perpendiculaire l'un à l'autre.
2. Les éléments de  soient normale.  
   (La norme de tous ses éléments soit l'unité.)  
   

## Relation orthonormalité

De et on peut dériver la relation orthonormalité :

Exemple

## Développement d'une fonction sur la base

Les éléments de la base  sont linéairement indépendants et forment un ensemble complet.  
Alors toute fonction  de  peut se développer d'une façon unique sur cette base.  


## Les coefficients

Pour trouver le, on à,  
  
On multiplie par,  
  
On intègre selon,

Pour,  
  
Donc,  


Exemple

## Analogie

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Espace | Espace |
| Base |  |  |
| Normalité de la base |  |  |
| Orthogonalité de la base |  |  |
| Orthonormalité de la base |  |  |
| Développement sur la base |  |  |
| Les composantes |  |  |

Tableau 2

## Analogie

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Base de | |  | Base de | |
| Vecteurs |  |  | **Fonctions** |
| Vecteurs orthogonaux |  |  | **Fonctions orthogonaux** |
| Vecteurs orthonormaux |  |  | **Fonctions orthonormaux** |
| Exemple de Développement  D’un vecteur sur la base |  |  | **Exemple de Développement**  **D’une fonction sur la base** |

Tableau 3

# Théorème de Stone-Weierstrass

Toute fonction  continue, sur  peut être approchée uniformément par une suite de fonctions polynômiales.



Exemple

## Procédé de Gram-Schmidt

Procédé de Gram-Schmidt est un algorithme pour construire une base orthonormée à partir d’un ensemble dénombrable de fonction de.  
On le montre par un exemple.

Soit un ensemble dénombrable de fonction de :   
  
On veut construire une base orthonormale, à partir de cet ensemble.  
On considère,  
  
  
Donc, on doit trouver  et .On suppose que la base doit être orthogonale pondérée par dans :   
  
Pout trouver on a besoin d’un standard, soit pour tout, donc,  
  
Alors;  
  
Maintenant on considère,  
  
Donc, on doit trouver , et .  
Encore une fois on suppose que la base doit être orthogonale pondérée par dans :   
  
  
Donc,   
  
Alors,   
  
De même … on peut trouver   
Les polynômes orthogonaux suivants qu’on les a trouvé son les polynômes de *Legendre*.  
  
  
  
…  
On peut les normalisés en les divisent chaque un par sa norme.  
  
  
  
…  
Et Voilà la base orthonormée qu’on voudrait construire :  


Exemple

# Formule de Rodrigues

Les polynômes,  
   
Avec les conditions suivants,

1. c’est un polynôme de degrés 0,1 ou 2.
2. c’est un polynôme de degrés 1.
3. appelée, fonction poids, est une fonction à valeurs finies et strictement positive dans.
4. Les conditions frontières.

Forment une base orthogonale de.

## Procédé de Rodrigues

Procédé de Rodrigues est un algorithme pour construire une base orthogonale de par le choix de.  
On le montre par un exemple.

Soit, un polynôme de degrés 0. En substituent dans la formule de Rodrigues on à,  
  
Pour on à,  
  
Mais, c’est un polynôme de degrés 1, soit , donc,  
  
Après simplification on arrive à,  
  
On intègre selon ,  
  
  
Mais,est une fonction strictement positive dans, donc,  
  
Alors,  
  
Pour simplifier on peut choisir,  
, donc,   
  
Si on applique les conditions frontières,   
  
Pour on peut montrer que.  
  
Pour on peut montrer que.  
Mais, comme on à,  
  
Alors, l’intervalle d'orthogonalité est, ,  
Encore une fois pour simplifier on peut choisir,  et donc,  
.  
Maintenant on est prêt de construire la base orthogonale en utilisent le formule de Rodrigues :  
   
  
  
  
…  
Historiquement et pour les raisons d’orthogonalité on considère,  
 donc,   
  
  
  
  
…  
Ce sont les polynômes de Hermite.

C’est facile à vérifier que les polynômes de Hermite sont orthogonaux dans.  
On peut les normalisés en les divisent chaque un par sa norme.

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |
|  |

….

Et on arrive à une base orthonormale sur laquelle on peut développer les fonctions quelconques.  


De façon analogue, on peut dériver les autres polynômes orthogonaux classiques.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Choix de |  |  |  |
| Fonction poids |  | Pour, | Pour, |
| Intervalle d'orthogonalité |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
| Polynôme | Hermite | Laguerre | Jacobi |

Tableau 4

Selon le choix de et les polynômes de Jacobi donnent les polynômes de Legendre, Gegenbauer, Chebyshev I et Chebyshev II.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Choix deet |  |  |  |  |
| Fonction poids |  | Pour, |  |  |
| Intervalle d'orthogonalité |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
| Polynôme | Legendre | Gegenbauer | Chebyshev I | Chebyshev II |

Tableau 5

Exemple

Les polynômes orthogonaux classiques  
Les polynômes orthogonaux associés classique

Exemple

* Hermite
* Laguerre
* Legendre
* Gegenbauer
* Chebyshev I
* Chebyshev II

# Quelques applications des polynômes orthogonaux classiques

En mécanique quantique:

* Les polynômes d'Hermite donnent les fonctions d'onde de l'oscillateur harmonique.
* Les polynômes de Laguerre donnent la dépendance radiale des fonctions d'onde de l'atome d'hydrogène.
* Les polynômes de Legendre interviennent dans tous les problèmes à symétrie sphérique.

Les polynômes de Chebyshev sont utiles dans les problèmes d'interpolation.

1. Le produit scalaire est linéaire par rapport à la deuxième fonction de la couple. [↑](#footnote-ref-1)
2. Le produit scalaire est anti linéaire par rapport à la première fonction de la couple. [↑](#footnote-ref-2)